

ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СТРУКТУРЫ ПОТОКОВ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ АППАРАТАХ

В. В. Кафаров^а, И. Н. Дорохов^а, Б. Якеш^б

^аКафедра кибернетики химико-технологических процессов,
Московский химико-технологический институт им. Д. И. Менделеева, Москва

^бКафедра автоматизированных систем управления,
Химико-технологический институт, Прага 6

Поступило в редакцию 28. января 1976

Разработана новая методика оценки математических моделей гидродинамической структуры потоков в технологических аппаратах с применением специально введенных κ -функций интенсивности и методов математической статистики. Показано, что κ -функции более чувствительны к структуре потоков в аппаратах, чем λ -функции интенсивности. Приведены аналитические выражения для весовых функций и λ - и κ -функций типовых гидродинамических моделей потоков. Методика иллюстрирована примером.

Обычной характеристикой гидродинамической обстановки в технологическом аппарате служит его весовая функция $K(t)^{1,3,4}$, которая статистически интерпретируется как функция распределения элементов потока по времени пребывания в аппарате. В этом смысле весовая функция полностью характеризует линейную систему. В связи с этим, задача синтеза интегрального оператора объекта сводится, во-первых, к дискриминации моделей, описывающих гидродинамическую структуру потоков, т.е. к установлению характера весовой функции, адекватно отражающей гидродинамику потоков в аппарате, и, во-вторых, к идентификации найденного оператора, т.е. к определению численных значений входящих в него параметров.

Настоящая работа посвящена решению первой задачи синтеза оператора, в частности, предлагается сравнительно простой, но эффективный метод выбора математической модели потоков в аппаратах на основе вероятностно-статистических характеристик моделируемых систем.

Эффективным инструментом при анализе различного типа неоднородностей в потоках служит вероятностная функция интенсивности $\lambda(t)$, которая определяется выражением^{2,3}:

$$\lambda(t) = \frac{K(t)}{iI(t)} = - \frac{d}{dt} \ln [iI(t)]. \quad (1)$$

Здесь $\bar{H}(t) = 1 - F(t)$, $F(t)$ — переходная функция системы. Физически $\lambda(t)$ есть мера вероятности выхода частицы потока из аппарата, которая находилась в нем в течение времени t .

Пользуясь основным свойством λ -функции (рельефно отражать особенности гидродинамической структуры потоков в аппаратах), можно предложить следующую методику дискриминации гидродинамической модели — (процедура NI):

1. дискриминация модели осуществляется путем качественного сравнения экспериментальной λ -функции с набором теоретических λ -функций в классе стандартных;

2. количественная оценка близости к данному классу выбранной таким образом весовой функции производится путем проверки гипотезы о законе распределения с помощью методов математической статистики;

3. окончательное установление адекватности модели реальному объекту осуществляется в результате идентификации найденного оператора.

Заметим, однако, что соотношение (1) не всегда приводит к простой форме связи между λ -функциями и функциями веса, которая желательна при практической реализации процедуры дискриминации. Кроме того, анализ весовых функций типовых гидродинамических структур потоков приводит к выводу о том, что λ -функции не являются наилучшими в смысле чувствительности к неоднородностям структур потоков.

С учетом сказанного введем в рассмотрение κ -функцию интенсивности, которую определим как линейную комбинацию λ -функции и ее логарифмической производной:

$$\kappa(t) = \lambda(t) - \frac{d}{dt} \ln \lambda(t) \quad (2)$$

Из (2) видно, что κ -функция отражает не только интенсивность „гибели“ (удаления из аппарата) частиц потока, но и скорость изменения логарифма этой интенсивности. Отсюда следует ожидать, что κ -функция интенсивности не менее чувствительна к гидродинамической обстановке в аппарате, чем λ -функция. Другое толкование κ -функции можно получить, подставляя (1) в (2):

$$\kappa(t) = - \frac{1}{K(t)} \frac{dK(t)}{dt} = - \frac{d}{dt} \ln K(t) \quad (3)$$

т.е. κ -функция есть логарифмическая производная от функции плотности распределения элементов потока по времени пребывания в аппарате (или, что то же, весовой функции системы).

Из сравнения (1) и (3) видно, что аналитические выражения κ -функций для важнейших типов структур потоков в аппаратах получаются значительно проще, чем для λ -функций.

Повышенная чувствительность κ -функций к гидродинамической структуре потоков в технологических аппаратах позволяет предложить следующую методику дискриминации гидродинамической модели (процедура $N\ 2$):

1. дискриминация модели осуществляется путем качественного сравнения экспериментальной κ -функции с набором теоретических κ -функций в классе стандартных;

2. количественная оценка близости к данному классу выбранной таким образом весовой функции производится путем проверки гипотезы о законе распределения с помощью методов математической статистики;

3. окончательное установление адекватности модели реальному объекту осуществляется в результате идентификации найденного оператора.

Для практической реализации изложенных процедур дискриминации необходим набор стандартных выражений и номограмм для λ - и κ -функций. Ниже приводятся эти выражения для важнейших типовых операторов, используемых при моделировании гидродинамической структуры потоков в аппаратах.

В практических расчетах удобнее работать в безразмерном времени $\Theta = t/\bar{t}$, где t — натуральное время и \bar{t} — среднее время пребывания частиц потока в аппарате. С учетом безразмерного времени получим для функции отклика объектов на импульсное и ступенчатое возмущение (C и F -кривые), а также для λ - и κ -функций следующие связи:

$$C(\Theta) = K(\Theta) = \bar{t}C(t); \quad F(\Theta) = F(t),$$

$$\lambda(\Theta) = \bar{t}\lambda(t); \quad \kappa(\Theta) = \bar{t}\kappa(t).$$

Модель идеального перемешивания

Основное уравнение:

$$\bar{t} \frac{dc}{dt} = c_{\text{вх}} - c, \quad \bar{t} = V/Q_v \quad (4)$$

C -кривая (функция веса):

$$C(\Theta) = K(\Theta) = \exp[-\Theta] \quad (5)$$

F -кривая:

$$F(\Theta) = 1 - \exp[-\Theta] \quad (6)$$

λ -функция:

$$\lambda(\theta) = C(\theta)/(1 - F(\theta)) = 1 \quad (7)$$

κ -функция:

$$\kappa(\theta) = -\frac{1}{C(\theta)} \frac{dC(\theta)}{d\theta} = 1 \quad (8)$$

Модель идеального вытеснения

Основное уравнение:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -v \frac{\partial c}{\partial x} \quad (0 \leq x \leq L) \quad (9)$$

C-кривая (функция веса):

$$C(\theta) = \delta(\theta - 1), \quad (\bar{t} = L/v) \quad (10)$$

F-кривая:

$$F(\theta) = \eta(\theta - 1), \quad (11)$$

где $\eta(\theta)$ - единичная функция, которая определена выражением:

$$\eta(\theta - 1) = \begin{cases} 0, & \theta < 1 \\ 1, & \theta > 1 \end{cases}$$

λ -функция:

$$\lambda(\theta) = \frac{C(\theta)}{1 - F(\theta)} = \delta(\theta - 1). \quad (12)$$

Структура идеального вытеснения характеризуется тем, что все частицы потока покидают аппарат в момент времени $t = \bar{t} = L/v$. Поэтому λ -функция графически изображается в виде луча, проведенного в положительную сторону из точки $\theta = 1$ параллельно оси ординат (рис. 1).

κ -функция:

$$\kappa(\theta) = -\frac{1}{C(\theta)} \frac{dC(\theta)}{d\theta} = \frac{-d/d\theta [\delta(\theta - 1)]}{\delta(\theta - 1)}. \quad (13)$$

Чтобы наглядно представить себе вид κ -функции (13), воспользуемся представлением δ -функции Дирака в виде предела непрерывно дифференцируемых функций. Это можно сделать различными способами:

$$\delta(t, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 t^2 + 1)} \quad (14)$$

либо

$$\delta(t, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha \sin \alpha t}{\pi \alpha t} \quad (15)$$

либо

$$\delta(t, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp[-\alpha^2 t^2] \quad (16)$$

и т.п. Пользуясь, например выражением (16), можно представить κ -функцию модели идеального вытеснения в виде:

$$\kappa(\Theta, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} 2\alpha^2(\Theta - 1) \quad (17)$$

Отсюда следует, что графически κ -функцию можно представить в виде прямой, проходящей через точку $\Theta = 1$ параллельно оси ординат (рис. 2).

Ячеечная модель

Основное уравнение для одной ячейки:

$$\frac{\bar{t}}{n} \frac{dc_i}{dt} = c_{i-1} - c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

где \bar{t}/n среднее время пребывания в одной ячейке; $\bar{t} = V/Q_v$ среднее время пребывания потока во всей системе; V суммарный объем всех ячеек.

C- кривая (на выходе n -й ячейки):

$$C(\Theta) = \frac{n^n}{(n-1)!} \Theta^{n-1} \exp[-n\Theta] \quad (19)$$

F-кривая:

$$F(\Theta) = 1 - \exp[-n\Theta] \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (n\Theta)^k \quad (20)$$

λ -функция:

$$\lambda(\Theta, n) = \frac{n^n \Theta^{n-1}}{(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (n\Theta)^k} \quad (21)$$

Предельные значения λ -функции:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \lambda(\theta, n) = 0 ; \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \lambda(\theta, n) = n$$

$$\lambda(\theta, 1) = 1 ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\theta, n) = \delta(\theta - 1).$$

Отсюда видно, что графики λ -функций начинаются в нуле и асимптотически приближаются к числам n , располагаясь между λ -кривой идеального перемешивания и λ -кривой идеального вытеснения (рис. 1).

κ -функция:

$$\kappa(\theta, n) = - \frac{1}{C(\theta)} \frac{dC(\theta)}{d\theta} = \frac{1 + n(\theta - 1)}{\theta}. \quad (22)$$

Предельные значения κ -функции:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \kappa(\theta, n) = -\infty ; \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \kappa(\theta, n) = n$$

$$\kappa(\theta, 1) = 1 ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(\theta, n) = - \frac{d}{d\theta} \ln \delta(\theta - 1).$$

Из (22) видно, что при $n \rightarrow \infty$ график κ -функции можно изобразить в виде прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $\theta = 1$, т.е. он принимает тот же вид, что и для структуры идеального вытеснения. В отличие от λ -функций, графики κ -функций не сходятся в нуле. При $\theta \rightarrow 0$ графики κ -функций проходят узловую точку ($\theta = 1, \kappa(1) = 1$) и опять расходятся,

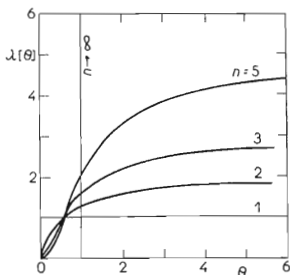


Рис. 1

λ -функции ячеечной модели при различных n

асимптотически приближаясь к оси ординат. Можно сказать, что при $\Theta \rightarrow 0$, λ -функции теряют информацию о структуре потока в аппарате, в то время как κ -функции ее сохраняют. Графики κ -функций для различных чисел ячеек приведены на рис. 2.

Однопараметрическая диффузионная модель

Основное уравнение:

$$E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t} \quad (23)$$

Вид характеристических функций зависит от начальных и граничных условий. Мы будем использовать граничные условия, соответствующие бесконечно длинному и полубесконечному аппарату.

1. Бесконечнодлинный аппарат:

C-кривая⁵:

$$C(\Theta) = \frac{1}{2}(\text{Pe}/\pi\Theta)^{1/2} \exp[-\text{Pe}(1 - \Theta)^2/4\Theta] \quad (24)$$

F-кривая:

$$F(\Theta) = \frac{1}{2} \{ \text{erfc}[\sqrt{\text{Pe}(1 - \Theta)}/2\sqrt{\Theta}] - \exp[\text{Pe}] \text{erfc}[\sqrt{\text{Pe}(1 + \Theta)}/2\sqrt{\Theta}] \} \quad (25)$$

λ -функция:

$$\lambda(\Theta) = \frac{(\text{Pe}/\pi\Theta)^{1/2} \exp[-\text{Pe}(1 - \Theta)^2/4\Theta]}{\text{erfc}[\sqrt{\text{Pe}(\Theta - 1)}/2\sqrt{\Theta}] + \exp[\text{Pe}] \text{erfc}[\sqrt{\text{Pe}(1 + \Theta)}/2\sqrt{\Theta}]} \quad (26)$$

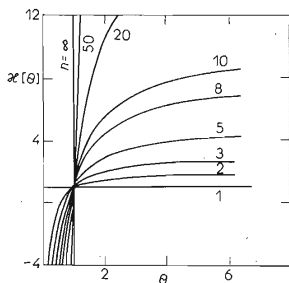


Рис. 2
 λ -функции ячеечной модели при различных n

Предельные значения:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \lambda(\theta) = 0; \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \lambda(\theta) = \text{Pe}/4$$

κ -функция:

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{2\theta} - \frac{\text{Pe}(1 - \theta^2)}{4\theta^2}. \quad (27)$$

Предельные значения:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \kappa(\theta) = -\infty; \quad \kappa(1) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \kappa(\theta) = \text{Pe}/4.$$

2. Полубесконечный аппарат при условии $\text{Pe} \gg 4$:

C-кривая:

$$C(\theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{\text{Pe}}{\pi\theta} \right)^{1/2} \frac{1 + \theta}{\theta} \exp \left[-\frac{\text{Pe}(1 - \theta)^2}{4\theta} \right] \quad (28)$$

F-кривая:

$$F(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \text{erf} \left[\frac{\sqrt{\text{Pe}(1 - \theta)}}{2\sqrt{\theta}} \right] \right\} \quad (29)$$

λ -функция:

$$\lambda(\theta) = \frac{C(\theta)}{1 - F(\theta)} = \frac{(\text{Pe}/\pi\theta)^{1/2} [(1 + \theta)/\theta] \exp[-\text{Pe}(1 - \theta)^2/4\theta]}{2 \text{erfc}[\sqrt{\text{Pe}(\theta - 1)}/2\sqrt{\theta}]} \quad (30)$$

Предельные значения:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \lambda(\theta) = 0; \quad \lambda(1) = (\text{Pe}/\pi)^{1/2}; \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \lambda(\theta) = \text{Pe}/4$$

κ -функция:

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{2\theta} + \frac{1}{\theta(1 + \theta)} - \frac{\text{Pe}(1 - \theta^2)}{4\theta^2}. \quad (31)$$

Предельные значения:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \kappa(\theta) = -\infty; \quad \kappa(1) = 1; \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \kappa(\theta) = \text{Pe}/4.$$

Из выражений (27) и (31) видно, что κ -функции носят экстремальный характер. Графики λ - и κ -функций для полубесконечного канала при условии

$Pe \gg 4$ показаны на рис. 3 и 4. Сравнительный анализ графиков λ - и κ -функций приводит к тем же выводам, какие были сделаны в случае ячеечной модели.

Диффузия в неподвижной среде

Основное уравнение:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t} . \quad (32)$$

Уравнение (32) будем решать для полубесконечного канала с граничными условиями:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x, t) = 0 , \quad (33)$$

$$c(0+, t) = A(t) . \quad (34)$$

Основные характеристики получим в виде:

Передаточная функция:

$$W(p) = c(L, p)/c(0, p) = \exp [-L(p/D)^{1/2}] \quad (35)$$

C-кривая [$A(t) = \delta(t)$]:

$$C(L, t) = (L/2t\sqrt{\pi Dt}) \exp [-L^2/4Dt] \quad (36)$$

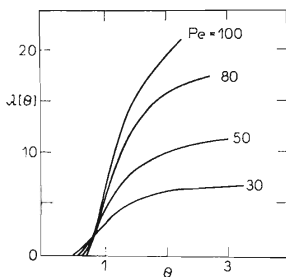


Рис. 3

λ -функции диффузионной модели (30) при различных числах Пекле

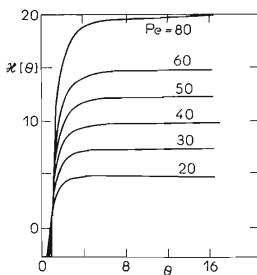


Рис. 4

κ -функции диффузионной модели (31) при различных числах Пекле

F-кривая [$A(t) = \eta(t)$]:

$$F(L, t) = \operatorname{erfc}(L/2\sqrt{Dt}) \quad (37)$$

λ -функция:

$$\lambda(t) = \frac{L \exp[-L^2/4Dt]}{2t\sqrt{(\pi Dt)} \operatorname{erf}(L/2\sqrt{Dt})} \quad (38)$$

κ -функция:

$$\kappa(t) = \frac{3}{2t} - \frac{L^2}{4Dt^2} \quad (39)$$

Предельные значения κ -функции:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \kappa(t) = -\infty; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \kappa(t) = 0.$$

Из выражения (39) видно, что κ -функция носит экстремальный характер. Экстремум лежит в точке: $t = L^2/3D$.

Комбинированная модель (ячейка идеального перемешивания с застойной зоной)

Структура модели представлена на рис. 5. Здесь $Q_{обм} = \beta Q_v$ — объемная скорость обмена вещества между ячейкой и застойной зоной; $\beta = Q_{обм}/Q_v$ — относительная скорость обмена; V_1, V_{33} — объем ячейки смешения и застойной зоны.

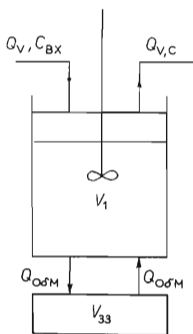


Рис. 5

Физическая схема комбинированной структуры (ячейка идеального перемешивания с застойной зоной)

Уравнения этой комбинированной модели структуры потоков имеют вид:

$$V_1 \frac{dc}{dt} = Q_v(c_{\text{вх}} - c) + Q_{\text{оём}}(c_{33} - c), \quad (40)$$

$$V_{33} \frac{dc_{33}}{dt} = Q_{\text{оём}}(c - c_{33}). \quad (41)$$

Уравнения (40) и (41) можно свести к одному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{V_1 V_{33}}{Q_v Q_{\text{оём}}} \frac{d^2 c}{dt^2} + \left(\frac{V}{Q_v} + \frac{V_{33}}{Q_{\text{оём}}} \right) \frac{dc}{dt} + c = c_{\text{вх}} + \frac{V_{33}}{Q_{\text{оём}}} \frac{dc_{\text{вх}}}{dt}. \quad (42)$$

Здесь $V = V_1 + V_{33}$ — объем всего аппарата; $V_{33} = \alpha V$; α — доля объема застойной зоны; $V_1 = (1 - \alpha) V$. Определим характерные временные параметры модели соотношениями:

$$T = V/Q_v, \quad (43)$$

$$T_0 = (V/Q_v) + (V_{33}/Q_{\text{оём}}) = (1 + \alpha/\beta) T, \quad (44)$$

$$T_1 = V_1/Q_v = (1 - \alpha) T, \quad (45)$$

$$T_2 = V_{33}/Q_{\text{оём}} = (\alpha/\beta) T \quad (46)$$

с учетом которых уравнение (42) примет вид:

$$\frac{\alpha(1 - \alpha)}{\beta} T^2 \frac{d^2 c}{dt^2} + \frac{(\alpha + \beta)}{\beta} T \frac{dc}{dt} + c = c_{\text{вх}} + \frac{\alpha}{\beta} T \frac{dc_{\text{вх}}}{dt}. \quad (47)$$

Передаточная функция:

$$W(p) = c(p)/c_{\text{вх}}(p) = [\alpha T p + \beta] / [\alpha(1 - \alpha) T^2 p^2 + (\alpha + \beta) T p + \beta]. \quad (48)$$

Заметим, что по известной передаточной функции легко определяется среднее время пребывания системы:

$$\bar{t} = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} W(p) = T. \quad (49)$$

Отсюда видно, что ранее введенный параметр T (43) является средним временем пребывания частиц потока в системе, которое не зависит ни от скорости обмена между проточной и застойной зоной, ни от относительного объема застойной зоны.

C-кривая:

$$C(\Theta) = \frac{\beta - \alpha - 2\alpha\beta + \gamma}{2\gamma(1 - \alpha)} \exp\left[\frac{\gamma - (\alpha + \beta)}{2\alpha(1 - \alpha)} \Theta\right] + \frac{\alpha - \beta + 2\alpha\beta + \gamma}{2\gamma(1 - \alpha)} \exp\left[\frac{-(\alpha + \beta) - \gamma}{2\alpha(1 - \alpha)} \Theta\right] \quad (50)$$

где $\gamma = [(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha^2\beta]^{1/2}$

F-кривая:

$$F(\Theta) = 1 - \frac{\alpha(\alpha - \beta + 2\alpha\beta - \gamma)}{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)} \exp\left[\frac{\gamma - (\alpha + \beta)}{2\alpha(1 - \alpha)} \Theta\right] - \frac{\alpha(\alpha - \beta + 2\alpha\beta + \gamma)}{\gamma(\alpha + \beta + \gamma)} \exp\left[\frac{-(\alpha + \beta) - \gamma}{2\alpha(1 - \alpha)} \Theta\right] \quad (51)$$

λ -функция:

$$\lambda(\Theta) = \frac{1}{1 - \alpha} - \frac{2\alpha\beta \operatorname{tgh} [\gamma\Theta/2\alpha(1 - \alpha)]}{(1 - \alpha) \{ \gamma + (\beta - \alpha) \operatorname{tgh} [\gamma\Theta/2\alpha(1 - \alpha)] \}} \quad (52)$$

Предельные значения λ -функции:

$$\lim_{\Theta \rightarrow 0} \lambda(\Theta) = 1/(1 - \alpha); \quad \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \lambda(\Theta) = [\beta - \alpha - 2\alpha\beta + \gamma]/(1 - \alpha)(\beta - \alpha + \gamma)$$

κ -функция:

$$\kappa(\Theta) = \frac{1}{1 - \alpha} - \frac{\beta \{ (\alpha + \beta) \operatorname{tgh} [\gamma\Theta/2\alpha(1 - \alpha)] - \gamma \}}{(1 - \alpha) \{ (\beta - \alpha - 2\alpha\beta) \operatorname{tgh} [\gamma\Theta/2\alpha(1 - \alpha)] + \gamma \}} \quad (53)$$

Предельные значения κ -функции:

$$\lim_{\Theta \rightarrow 0} \kappa(\Theta) = (1 + \beta)/(1 - \alpha);$$

$$\lim_{\Theta \rightarrow \infty} \kappa(\Theta) = [\gamma - \alpha + \beta(1 - 3\alpha - \beta + \gamma)]/[(1 - \alpha)(\beta - \alpha - 2\alpha\beta + \gamma)]. \quad (54)$$

Графики λ - и κ -функций для различных значений параметров α и β приведены на рис. 6 и 7.

Комбинированная модель (две последовательно соединенные ячейки идеального перемешивания с различными объемами)

Основное уравнение:

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 c}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{dc}{dt} + c = c_{\text{вх}}, \quad (\tau_1 \neq \tau_2) \quad (55)$$

где τ_1, τ_2 — средние времена пребывания частиц потока в отдельных ячейках системы.

Передаточная функция:

$$W(p) = c(p)/c_{\text{вх}}(p) = [\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2) p + 1]^{-1}. \quad (56)$$

Среднее время пребывания во всей системе:

$$\bar{t} = \tau_1 + \tau_2. \quad (57)$$

Предполагая, что $\tau_2 < \tau_1$ и обозначив $a = \tau_2/\tau_1$, где $0 \leq a < 1$, получим основные характеристики этой структуры в видах:

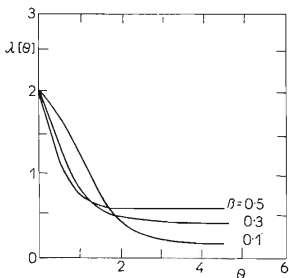


Рис. 6

λ -функция комбинированной модели (52) при $\alpha = 0,5$

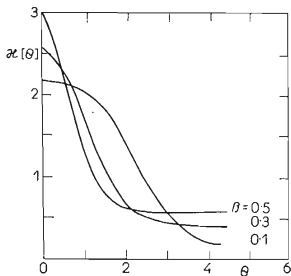


Рис. 7

κ -функции комбинированной модели (53) при $\alpha = 0,5$

C-кривая:

$$C(\Theta) = iC(t) = \frac{1+a}{1-a} \left\{ \exp[-(1+a)\Theta] - \exp\left[-\left(\frac{1+a}{a}\right)\Theta\right] \right\} \quad (58)$$

F-кривая:

$$F(\Theta) = 1 - \frac{1}{1-a} \exp[-(1+a)\Theta] + \frac{a}{1-a} \exp\left[-\left(\frac{1+a}{a}\right)\Theta\right] \quad (59)$$

λ -функция:

$$\lambda(\Theta) = 1 + \frac{a - \exp\{-[(1-a^2)/a]\Theta\}}{1 - a \exp\{-[(1-a^2)/a]\Theta\}}. \quad (60)$$

Предельные значения λ -функции:

$$\lim_{\Theta \rightarrow 0} \lambda(\Theta) = 0; \quad \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \lambda(\Theta) = 1 + a$$

κ -функция:

$$\kappa(\Theta) = \frac{1+a}{a} \left(1 + \frac{a-1}{1 - \exp\{-[(1-a^2)/a]\Theta\}} \right). \quad (61)$$

Предельные значения κ -функции:

$$\lim_{\Theta \rightarrow 0+} \kappa(\Theta) = -\infty; \quad \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \kappa(\Theta) = 1 + a.$$

Комбинированная модель (ячейка идеального перемешивания с байпасом)

В этой модели предполагается, что доля входного потока fQ_v , где $0 \leq f < 1$, ведется с бесконечной скоростью на выход аппарата. Доля $(1-f)Q_v$ поступает в ячейку идеального перемешивания.

Основное уравнение:

$$\frac{\tau}{1-f} \frac{dc}{dt} + c = c_{вх} + \frac{\tau f}{1-f} \frac{dc_{вх}}{dt} \quad (62)$$

где $\tau = V/Q_v$, V — объем ячейки идеального перемешивания.

Передаточная функция:

$$W(p) = \frac{c(p)}{c_{вх}(p)} = \frac{p\tau f/(1-f) + 1}{p\tau/(1-f) + 1} = f + \frac{(1-f)^2}{\tau p + (1-f)}. \quad (63)$$

Среднее время пребывания в системе:

$$\bar{t} = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} W(p) = \tau \quad (64)$$

C-кривая:

$$C(\Theta) = f\delta(\Theta = 0) + (1 - f)^2 \exp[-(1 - f)\Theta] \quad (65)$$

F-кривая:

$$F(\Theta) = 1 - (1 - f) \exp[-(1 - f)\Theta] \quad (66)$$

λ -функция:

$$\lambda(\Theta) = 1 - f \quad \text{для } \Theta \geq 0+ \quad (67)$$

κ -функция:

$$\kappa(\Theta) = 1 - f \quad \text{для } \Theta \geq 0+ \quad (68)$$

Комбинированная модель (параллельное соединение ячейки идеального перемешивания и идеального вытеснения)

Если обозначим долю потока поступающего в зону идеального вытеснения mQ_v и среднее время пребывания частиц в зоне идеального перемешивания $T_1 = V_1/(1 - m)Q_v$, получим основное уравнение модели в виде:

$$T_1 dc(t)/dt + c(t) = (1 - m)c_{\text{вх}}(t) + mc_{\text{вх}}(t - T_2) + mT_1 dc_{\text{вх}}(t - T_2)/dt \quad (69)$$

где $T_2 = V_2/mQ_v$ — время пребывания в зоне идеального вытеснения, V_1, V_2 — объемы зон идеального перемешивания и вытеснения.

Предаточная функция:

$$W(p) = c(p)/c_{\text{вх}}(p) = (1 - m)/(T_1 p + 1) + m \exp[-pT_2]. \quad (70)$$

Среднее время пребывания в системе:

$$\bar{t} = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} W(p) = (1 - m)T_1 + mT_2 = T_1[1 + m(\alpha - 1)], \quad (71)$$

где $\alpha = T_2/T_1$.

C-кривая:

$$C(\Theta) = (1 - m)[1 + m(\alpha - 1)] \exp[-\{1 + m(\alpha - 1)\}\Theta] + m\delta[\Theta - \alpha/(1 + m(\alpha - 1))] \quad (72)$$

F-кривая:

$$F(\Theta) = (1 - m)(1 - \exp[-\{1 + m(\alpha - 1)\} \Theta]) + m\eta(\Theta - \alpha/(1 + m(\alpha - 1))) \quad (73)$$

λ -функция:

$\lambda(\Theta) =$

$$\frac{(1 - m)[1 + m(\alpha - 1)] \exp[-\{1 + m(\alpha - 1)\} \Theta] + m\delta[\Theta - \alpha/(1 + m(\alpha - 1))]}{1 - (1 - m)(1 - \exp[-\{1 + m(\alpha - 1)\} \Theta]) - m\eta[\Theta - \alpha/(1 + m(\alpha - 1))]} \quad (74)$$

или

$$\lambda(\Theta) = \frac{(1 - m)[1 + m(\alpha - 1)] \exp[-\{1 + m(\alpha - 1)\} \Theta]}{m + (1 - m) \exp[-\{1 + m(\alpha - 1)\} \Theta]} \quad \text{для } \Theta < \alpha/(1 + m(\alpha - 1))$$

$$\lambda(\Theta) = 1 + m(\alpha - 1) \quad \text{для } \Theta > \alpha/(1 + m(\alpha - 1))$$

$$\lambda(\Theta) = \infty \quad \text{для } \Theta = \alpha/(1 + m(\alpha - 1))$$

κ -функция:

$\kappa(\Theta) =$

$$\frac{(1 - m)[1 + m(\alpha - 1)]^2 \exp[-\{1 + m(\alpha - 1)\} \Theta] - m\delta'[\Theta - \alpha/(1 + m(\alpha - 1))]}{(1 - m)[1 + m(\alpha - 1)] \exp[-\{1 + m(\alpha - 1)\} \Theta] + m\delta[\Theta - \alpha/(1 + m(\alpha - 1))]} \quad (75)$$

или

$$\kappa(\Theta) = 1 + m(\alpha - 1) \quad \text{для } \Theta < \alpha/(1 + m(\alpha - 1))$$

$$\kappa(\Theta) = 1 + m(\alpha - 1) \quad \text{для } \Theta > \alpha/(1 + m(\alpha - 1))$$

Комбинированная модель (диффузионная модель с распределенной застойной зоной)

Уравнения структуры:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = E \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - \frac{\partial c_1}{\partial x} v - \frac{F_2}{F_1} \frac{\partial c_2}{\partial t} \quad (76)$$

$$F_2 \frac{\partial c_2}{\partial t} = K_{33}(c_1 - c_2) \quad (77)$$

Здесь (76) — уравнение математической модели проточной части аппарата; (77) — уравнение математической модели застойной части аппарата; F_1, F_2 — доля проточной и застойной части объема аппарата; K_{33} — коэффициент, характеризующий скорость обмена между зонами.

Исследуемая система состоит из двух линейных подсистем (проточной и застойной) с перекрестными распределенными связями. Пользуясь принципом суперпозиции для многомерных линейных систем, нетрудно получить искомую весовую функцию или C -кривую данной комбинированной структуры:

$$C_1(t, L) = \frac{\exp[-(L-vt)^2/4Et]}{(4\pi Et)^{1/2}} + \int_0^t \int_0^{t-\zeta} \frac{\exp\{-[L-v(t-\zeta-\xi)]^2/4E(t-\zeta-\xi)\}}{[4\pi E(t-\zeta-\xi)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{K_{33}}{F_1}(t-\zeta-\xi)\right] \cdot \frac{K_{33}}{F_2} \exp\left[-\frac{K_{33}}{F_2}\zeta\right] \frac{\exp[-(L-v\zeta)^2/4E\zeta]}{(4\pi E\zeta)^{1/2}} d\zeta d\xi \quad (78)$$

где L — длина аппарата.

Для вычисления κ -функции по известной функции $C_1(t, L)$ необходимо воспользоваться соотношениями (3).

Пример. Для иллюстрации приведенного материала рассмотрим приближенный метод дискриминации математической модели структуры потока жидкой фазы в насадочной колонне. На рис. 8 изображена экспериментальная весовая функция насадочной колонны высотой $l = 2,0$ м и диаметром 0,15 м. Размер насадки 10×10 . Параметры технологического режима: плотность орошения $L_0 = 6725$ кг/м³ час, нагрузка по газу $G = 2038$ кг/м³ час, линейная скорость орошения $W = 0,4 \cdot 10^{-1}$ м/сек, коэффициент продольного перемешивания $E = 2,36 \cdot 10^{-3}$ м²/сек. По этой экспериментальной кривой была выполнена идентификация однопараметрической диффузионной модели* и диффузионной модели с застойной зоной. Графики весовых функций этих моделей и соответствующие им κ -функции изображены на рис. 8. Из сравнения κ -функций (рис. 8) можно сделать вывод, что математическая модель с застойной зоной в большей степени отвечает реальной структуре потока. Для количественной проверки этой гипотезы использовался критерий χ^2 — Пирсона. Вычисление критерия χ^2 выполнялось по 16 точкам весовой функции: $m = 16$. Результаты проверки для степеней свободы $N = m - 1 - 1$ (условие несмещенности в оценке χ^2 и идентификация модели по одному параметру E уменьшают число степеней свободы на 2 единицы), для которой $\chi^2 = 21,064$, были в пользу модели с застойной зоной с процентной вероятностью достоверности $q = 10\%$; расчетное значение критерия $\chi^2 = 9$. Расчетное значение критерия χ^2 для диффузионной модели равно 19.

* Условия полубесконечного канала.

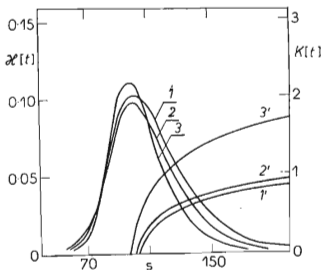
Условные обозначения

$c_{вх}(t)$	концентрация вещества на входе в аппарат, кмоль/м ³
$c(t)$	концентрация вещества на выходе из аппарата, кмоль/м ³
$c_1(t)$	концентрация вещества в проточной зоне, кмоль/м ³
$c_2(t), c_{33}(t)$	концентрации вещества в застойной зоне, кмоль/м ³
Q_v	объемная скорость потока, м ³ /сек
V, V_1, V_2, V_{33}	объемы, м ³
F_1, F_2	доля проточной и застойной части объема аппарата
v	линейная скорость потока, м/сек
K_{33}	коэффициент обмена между зонами
x	координата, м
L	длина экспериментального участка аппарата, м
D	коэффициент диффузии, м ² /сек
E	коэффициент продольного перемешивания, м ² /сек
$Pe = vL/E$	безразмерное число Пекле
t	натуральное время, сек
\bar{t}	среднее время пребывания частиц в системе, сек
$\Theta = t/\bar{t}$	безразмерное время
T, T_0, T_1, T_2	постоянные времени, сек
a, f, m	параметры
p	комплексная переменная
$W(p)$	передаточная функция
τ, τ_1, τ_2	постоянные времени, сек
α, β, γ	параметры, $\delta(t)$ - δ -функция Дирака, $\eta(t)$ — единичная функция, ζ, ξ — переменные интегрирования.

Рис. 8

Графики весовых функций ($I, 2, 3$) и соответствующих κ -функций интенсивности ($I', 2', 3'$) для насадочной колонны

1, I' экспериментальные кривые; 2, $2'$ кривые, рассчитанные по комбинированной модели; 3, $3'$ кривые, рассчитанные по однопараметрической диффузионной модели.



Литература

1. В. В. Кафаров: *Методы кибернетики в химии и химической технологии*. Химия, Москва 1971.
2. P. Naor, R. Shinar: *Ind. Eng. Chem., Fundam.* 2, 278 (1963).
3. И. Н. Дорохов: *Математическое моделирование гидродинамической структуры потоков в насадочных колоннах. Итоги науки и техники, Процессы и аппараты химической технологии*, том I., ВИНТИ, Москва 1973.
4. Л. Н. Липатов: *Типовые процессы химической технологии как объекты управления*. Химия, Москва 1973.
5. O. Levenspiel, W. K. Smith: *Chem. Eng. Sci.* 6, 227 (1957).